



# Kuplajlı Nöronlardan Oluşan Bir Ağın Kesirli Alanda Analizi

## Analysis of a Network of Electrically Coupled Neurons in Fractional Domain

Mahmut Ün<sup>1</sup>, Manolya Ün<sup>2</sup>, Faruk Sanberk Kızıltaş<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Biyomedikal Mühendisliği Bölümü, Yeni Yüzyıl Üniversitesi, İstanbul, Türkiye  
[mahmut.un@yeniyuzuil.edu.tr](mailto:mahmut.un@yeniyuzuil.edu.tr)

<sup>2</sup>Tıp Fakültesi, Medical University of Pleven, Plevne, Bulgaristan  
[manolya.un3@gmail.com](mailto:manolya.un3@gmail.com)

<sup>3</sup>Biyomedikal Mühendisliği Bölümü, Yeni Yüzyıl Üniversitesi, İstanbul, Türkiye  
[fsanberk.kiziltas@yeniyuzuil.edu.tr](mailto:fsanberk.kiziltas@yeniyuzuil.edu.tr)

**Özetçe** — Sinir hücreleri arası sinaptik sinyal iletimi biyolojik sistemlerde elektriksel kuplaj ilintileriyle sağlanır. Bu nedenden ötürü işlevsel benzerlik gösteren bir hücre topluluğunda, ağın genel elektriksel özelliklerinin her bir hücrenin dinamik davranışı üzerinde etkili olması kaçınılmazdır. Bu çalışmada hücre zarları kesirli mertebeden devre elemanlarıyla modellendiğinde, tek bir uyarım verilen herhangi bir hücrenin dinamik yanıtlarını ortaya koyan devre denklemleri için daha detaylı ve doğru analitik çözümlerinin bulunabileceği gösterilmiştir. İlgili devre ağı için transfer fonksiyonu ve giriş empedansı eşitlikleri transmisyon matrisi kavramı kullanılarak, kesirli domende türetilmiştir. Bunlara ek olarak, sayısal bir örnek sunmak amacıyla sinir hücre elektrik ağları için gerekli MATLAB benzetimleri uygulanmıştır.

**Anahtar Kelimeler** — kesirli-mertebeden hücre modeli; transmisyon matrisi; bir boyutlu devre ağı; dinamik analiz.

**Abstract** — Synaptic signal transduction between nerve cells is mediated by electrical coupling in biological systems, implying the dynamic behavior of each cell in such a cluster of functionally similar neurons is inevitably influenced by the electrical properties of the whole network. This study demonstrates that when cell membranes are modeled after fractional order circuit elements, analytical solutions to the network equations can be found that describe the dynamic responses of any given cell to a single stimulus in greater and more accurate detail. Transfer function and the driving point impedance for this circuit network are derived in the fractional domain based on the application of the transmission matrices concept. Furthermore, necessary MATLAB simulations are performed on the network and are included as a numerical example.

978-1-5090-2386-8/16/\$31.00 ©2016 IEEE

**Keywords** — fractional-order cell model; transmission matrix; one dimensional circuit network; dynamic analysis.

### I. GİRİŞ

Biyolojik sistemlerde, sinir ağlarının birim elemanı varsayılan sinir hücreleri (nöronlar) arasındaki iletişim, elektriksel kuplaj ilintileri yoluyla sağlanır [1]. Kalp kası hücreleri ve düz kas hücreleri gibi nöron kökenli olmayan bazı hücre toplulukları da kendi içlerinde benzer kuplajlı etkileşimler gösterebilmektedir. Bu sistemlerde tek bir hücre üzerine uygulanan bir uyarı, elektriksel kuplaj bağlantıları yardımıyla, yatay düzlemde komşu dört veya beş hücre üzerinde sıralı olarak yayılabilir [2, 3, 4]. Yine de çoğu durumda, işlevsel açıdan eşdeğer hücrelerden oluşan bir topluluk, iletişimin sürekliliği için kesintisiz bir hücreler-arası kuplaj zinciriyle bağlı olmalıdır. Bu nedenle, ağın genel elektriksel özelliklerinin her bir hücrenin dinamik davranışı üzerinde etkili olması kaçınılmazdır [5, 6, 7, 8].

Biyolojik sistemlerin induktans ve kapasite gibi elektriksel karakteristiklerini açıklamak için geliştirilen kesirli mertebeden matematiksel modeller, bu özellikleri tamsayı mertebeden modellere nazaran daha doğru ve kesin değerlerle ifade edebilmektedir. Diğer bir ifadeyle, gerçek induktans ve kapasite değerleri doğal olarak kesirli mertebededir [9]. Örneğin günümüzde, uzun hafıza bağımlılığının nöron cevabının aslına daha yakın değerlerle uyarlanması amacıyla, sistemin tamsayı mertebeden kablo modeli yerine kesirli mertebeden modeli tercih edilmektedir.

Eşdeğer hücrelerden oluşan ve elektriksel kuplaj ilintileriyle bağlanmış bir nöron topluluğunun dinamik

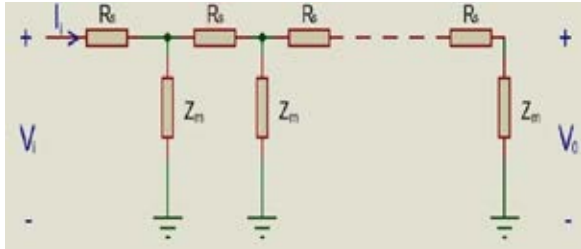
## Biyomedikal Ölçüm 1

2. Gün / 28 Ekim 2016, Cuma

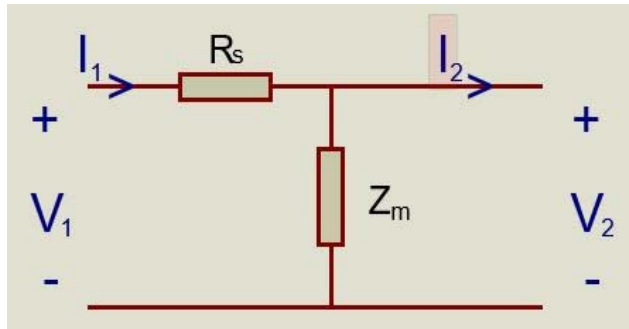
davranışı, kritik olarak hücre zarlarının genelleştirilmiş empedansına bağlıdır. Aynı nöron ağı içindeki bir hücre belirli bir kaynaktan uyarıldığı takdirde, uyarma potansiyelinin ağ içinde aktif olarak yayıldığı ve bağlı hücrelerin ortak senkronizasyona geçtiği gözlemlenebilir [10]. Bu makalede zar empedansının kesirli mertebeden RLC elemanlarıyla modellendiği varsayılmıştır. Bu yaklaşımda aktif zarların lineer olmayan durumunu karakterize etmek için en genel model kullanılmıştır. Çalışmamızda zar empedansı, devrenin dinamiklerini karakterize etmektedir ve elektriksel kuplaj büyüklüğünün ağın genel davranışı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Frekans ve zaman domeninde devre-ağ denklemleri için açık analitik çözümler geliştirilmiştir.

### II. AĞ MODELİ VE DENKLEMLERİ

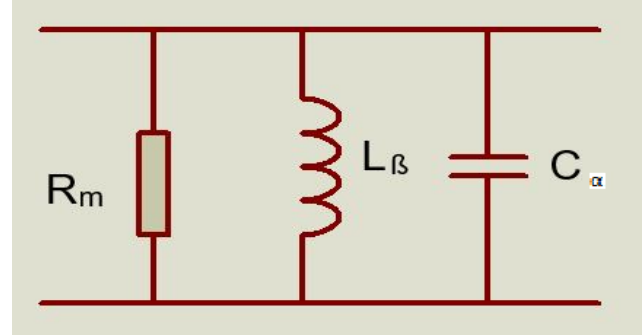
Elektriksel etkileşiminin, boşluk eklemi olarak isimlendirilen hücre plazma zarının uzantısıyla sağlandığına inanılmaktadır [11]. Bu yapılar, komşu hücreler arasındaki küçük empedansların bölgesidir ve elektriksel eşdeğer dirençler  $R_s$  ile gösterilir. Aralık fonksiyonunun kapasitansı çok küçüktür ve ihmal edilebilir.  $R_s$  dirençleriyle elektriksel kuplajlı eşdeğer hücrelerden oluşan bir boyutlu dizilişin eşdeğer devresi Şekil 1'de gösterilmiştir. Zm kesirli mertebeden RLC elemanlarından oluşan hücre zarı empedansıdır ve elektriksel eşdeğer devresi Şekil 2a' da gösterilmiştir.



Şekil 1: Elektriksel kuplajlı hücrelerden oluşan ağın bir boyutlu elektriksel eşdeğeri



Şekil 2a:  $Z_m$  empedansının kesirli-mertebe elemanları



Şekil 2b: Birim hücre için elektriksel eşdeğer

Bir boyutlu ağın elektriksel eşdeğeri, Şekil 2b'de elektriksel eşdeğeri verilen  $n$  adet hücreden oluştuğu varsayılmıştır. Toplam devre ağı için giriş empedansı ve transfer fonksiyonunun bulunmasında iletişim matrisi parametrelerinden yararlanılacaktır. Önce birim hücrenin elektriksel eşdeğeri için iletişim matrisi bulunur ve toplam devre ağının kaskat bağlı hücre modellerinden oluştuğu düşünülerek, bir boyutlu elektriksel ağ için iletişim matrisi bulunabilir. Şekil 2a da verilen devre için admitans değeri:

$$Y(s) = \frac{1}{R_m} + C_\alpha s^\alpha + \frac{1}{L_\beta s^\beta} \quad (1)$$

Şekil 2b'de verilen elektriksel eşdeğer için iletişim matrisi hesaplanırsa:

$$T = \begin{bmatrix} 1 + R_s Y_m & R_s \\ Y_m & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

olur.

Bir boyutlu ağ için verilen elektriksel eşdeğer devre modeli için iletişim matrisi:

$$T_n = T^n \quad (3)$$

eşitliği ile bulunabilir.

Pozitif  $n$  için  $T^n$  matrisin  $n$  defa çarpımı olarak tanımlanır. Eğer  $T$ ,  $2 \times 2$  boyutunda bir matris ve  $I$  birim matris ise, Cayley – Hamilton teoremine göre:

$$T^n = \alpha_0 I + \alpha_1 T \quad (4)$$

eşitliği yazılabilir. Burada:

$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 \lambda_1^n - \lambda_1 \lambda_2^n \\ \lambda_2^n - \lambda_1^n \end{bmatrix}$  ve  $\lambda_{1,2}$  tekrar etmeyen özdeğerlerdir [12].  $\lambda_1 = R_s Y_m$ ,  $\lambda_2 = 1$  özdeğerleri yukarıdaki eşitlikte kullanılırsa:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{R_s Y_m} \begin{bmatrix} 1 + R_s Y_m [1 - (1 + R_s Y_m)^{n-1}] \\ (1 + R_s Y_m)^n - 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

olarak bulunur. Bu değer kullanılarak bir boyutlu devre ağı için hesaplanan iletişim matrisi:

$$T^n = \begin{bmatrix} (1 + R_s Y_m)^n & \frac{(1 + R_s Y_m)^n - 1}{Y_m} \\ \frac{(1 + R_s Y_m)^n - 1}{R_s} & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$I_2 = 0$  için  $Z_{in} = \frac{V_1}{I_1}$  olarak tanımlanan giriş empedans değeri:

$$Z_{in} = \frac{(1 + R_s Y_m)^n R_s}{(1 + R_s Y_m)^n - 1} \quad (7)$$

ve  $H(s) = \frac{V_2}{V_1}$  olarak tanımlanan transfer fonksiyonunun değeri:

$$H(s) = \frac{1}{(1 + R_s Y_m)^n} \quad (8)$$

olarak hesaplanır. Biyolojik sistemlerde en genel durumda, sinir hücreleri arasında elektriksel kuplajlı sinaptik işaret iletimini incelemek amacıyla, kesirli mertebeden elektriksel elemanlarla modellenen bir boyutlu nöron ağının elektriksel eşdeğeri kullanılmıştır. Bu ağın dinamik analizi, kesirli mertebeden elektriksel elemanlar kullanıldığından s-domeninde transfer fonksiyonu yaklaşımıyla yapılmıştır. Dinamik analizde kullanılan eşdeğer empedans ve transfer fonksiyonları kesirli domende analitik açık ifadeler olarak elde edilmiştir.

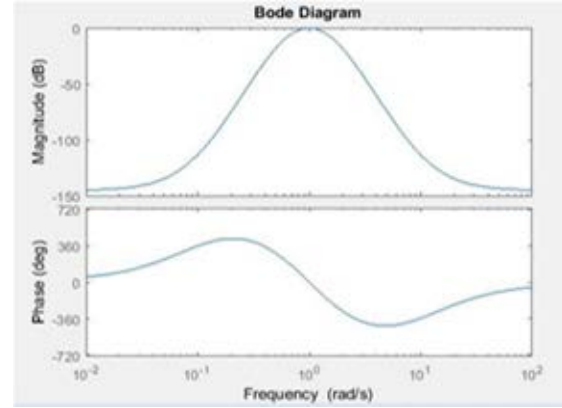
Bu eşitlikler giriş empedansı ve transfer fonksiyonu hücre sayısı ve kesirli mertebe değerlerine bağlı açık analitik ifadeler şeklindedir. Bu eşitliklerle, transfer fonksiyonu yaklaşımı kullanılarak elektrik ağ sisteminin tam dinamik analizleri yapılabilir. Örneğin empedans karakteristiklerinin incelenmesi, sistemin frekans yanıtı, basamak ve darbe yanıtları incelenebilir.

### III. KESİRLİ DOMENDE AĞIN MATLAB BENZETİMLERİYLE DİNAMİK ANALİZİ

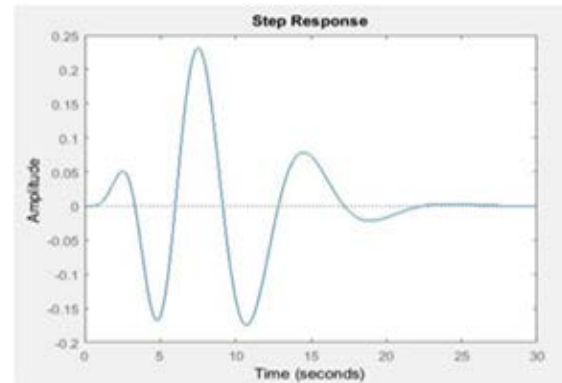
Kesirli domende önerilen ağ parametreleri;  $R_s=1$ ,  $n=10$ ,  $\alpha=\beta=0.5$  değerleri,  $s^{0.5}=(3*s+1)/(s+3)$  ve  $s^{(-0.5)}=(s+3)/(3*s+1)$  yaklaşımları kullanılmıştır [12]. Önce (8) eşitliği ile verilen transfer fonksiyonunun MATLAB benzetiminde sırayla frekans, basamak ve darbe yanıtları elde edilmiştir. Bu yanıtların grafikleri sırayla Şekil 3a, 3b ve 3c'de gösterilmiştir. Şekil 3a frekans yanıtından transfer fonksiyonunun kararlı olduğu ve band geçiren süzgeç karakteristiğine sahip olduğu görülmektedir. Çok düşük ve yüksek frekanslarda çıkış yanıtı sıfır, ancak 0.01-100 rad/s arasında çıkış yanıtı alınabilmektedir.

Transfer fonksiyonu 1rad/s frekans değerinde maksimum genlik ve  $0^\circ$  faz değeri vardır. Şekil 3b ve 3c'deki birim basamak ve darbe yanıtlarından, geçici rejim bileşenlerinden sonra sıfıra giden sürekli bileşenlerinin olduğu anlaşılmaktadır. Sonuç olarak elektrikselsel kuplajlı

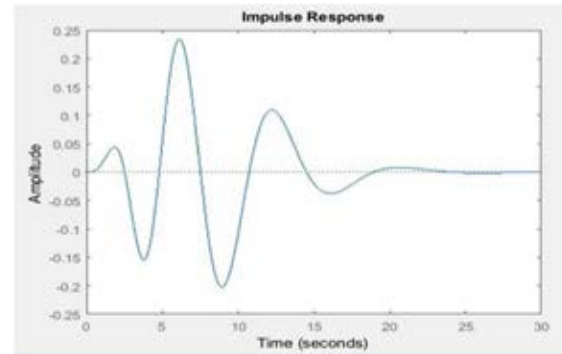
bir boyutlu nöron ağının, kesirli mertebeden elektriksel elemanlarla modellenilecek ve istenen karakteristiğe göre tasarlanabilecektir. Ayrıca darbe, basamak ve frekans yanıtlarından sistem zaman sabiti, gecikme ve yükselme zamanı gibi diğer önemli sistem karakteristikleri hesaplanabilir.



Şekil 3a: Transfer fonksiyonunun frekans yanıtı



Şekil 3b: Transfer fonksiyonunun basamak yanıtı



Şekil 3c: Transfer fonksiyonunun darbe yanıtı

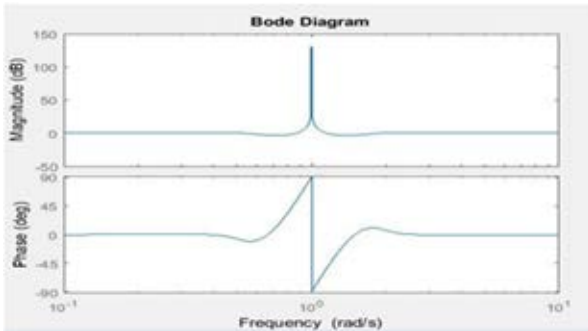
Daha sonra yine aynı parametre değerleri için (7) eşitliğiyle verilen eşdeğer empedansın MATLAB benzetimleriyle daha önce yapılan analizler



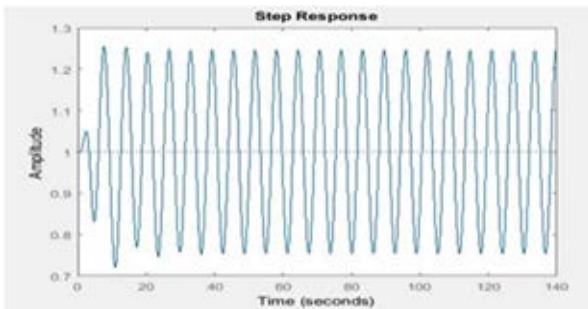
## Biyomedikal Ölçüm 1

2. Gün / 28 Ekim 2016, Cuma

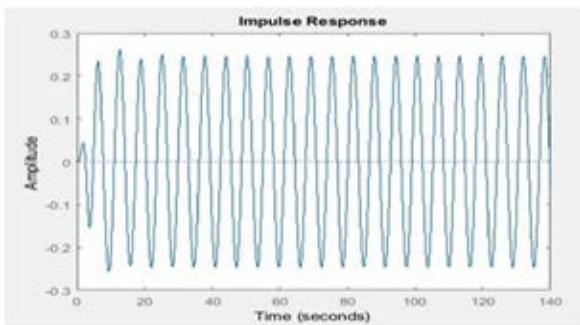
tekrarlanmıştır. Eşdeğer empedans için elde edilen frekans, basamak ve darbe yanıtları sırayla Şekil 4a, 4b ve 4c'de gösterilmiştir. Şekil 4a frekans yanıtından empedans fonksiyonunun kararlı ve band geçiren (dar bandlı) filtre karakteristiğinin olduğu görülmektedir. Transfer fonksiyonu yalnız 1 rad/s frekans civarında sıfırdan farklı bir frekans yanıtı vermektedir. Şekil 4b ve 4c' den kesirli mertebeden empedans fonksiyonlarıyla modellenen bir boyutlu nöron ağı ve darbe basamak girişleriyle uyarıldığında, osilasyon şeklinde gerilimler üretilmektedir.



Şekil 4a: Eşdeğer empedansın frekans yanıtı



Şekil 4b: Eşdeğer empedansın basamak yanıtı



Şekil 4c: Eşdeğer empedansın darbe yanıtı

## IV. SONUÇLAR

Elektriksel kuplajlı nöronlardan oluşan tek boyutlu devre ağ modelinde kesirli mertebeden elektriksel elemanlar kullanıldığında, ağın matematiksel modeli transfer

fonksiyonlarıyla gösterilmiştir. Tek boyutlu elektriksel kuplajlı nöron ağının dinamik analizi için, transfer fonksiyonu ve eşdeğer empedans değerleri, analitik açık ifadeler olarak bulunmuştur. Ağ modelinde lineer olmayan kesirli mertebeden elemanlar bulunmasına rağmen, Laplace transformunun özelliklerini kullanarak transfer fonksiyonu analizi ağın dinamik analizinde kullanılmıştır. Ağ için önerilen matematiksel model kullanılarak, standart test fonksiyonu girişleri için MATLAB benzetimleriyle frekans, basamak ve darbe yanıtları gibi ağ çıkışları grafik olarak elde edilmiştir. Bu sonuçlarla ağın sistem parametreleri ve dinamik özellikleri hakkında yorumlar yapılmıştır.

Ayrıca modelde kullanılan hücre sayısına, kesirli mertebe değerlerine ve elektriksel kuplaj değerlerine bağlı olarak ağın başarımı, önerilen model yardımıyla kolayca incelenebilir. Bu konulardaki araştırmalar daha sonraki çalışmalara bırakılmıştır.

## KAYNAKÇA

- [1] M.V.L. Bennett, The Physiology of electronic junctions, Ann N.Y. Acad. Sci., Vol. 137, pp 509 – 539 1966
- [2] M.E Holman and G.D.S Hirst, Junctional transmission in smooth muscle and autonomic nervous system, Hand book of Physiology, Bethesda, MD: American Physiological Society 1977
- [3] C. Koch, T. Poggio and V. Torre, Retinal ganglion cells: A functional interpretation of dendritic morphology, Phil. Trans. R. Soc. Land, Vol. B298, pp. 227-264, 1982
- [4] S. Weideman, The electrical constants of Purkinje fibres, J. Physiol, Vol. 118, pp. 348 – 360, 1952
- [5] A. A. Auerbach and MVL Bennett, A rectifying synapse in the central nervous system of a vertebrate J. Gen. Physiol, Vol 53, pp. 211-237, 1969
- [6] D.A. Baylor, MGF Fuortes and PM O'Bryen, Receptive fields of single cones in the retina of the turtle, J. Physiol, Vol. 207, pp. 77-92, 1971
- [7] D.R Copenhagen and W.G. Owen, Functional Characteristics of lateral interactions between rods in the retina of the snapping turtle, J. Physiol, Vol. 259, pp. 251 - 282, 1976
- [8] P.B. Detwiler and A.L. Hodgkin, Electrical coupling between cones in the turtle retina, J. Physiol, Vol 291, pp 75-100, 1979
- [9] A. Abbisso, R. Cuponetto and L. Fortuna, Proc. Symp. Circuits Syst. (38)(2001), 688
- [10] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, A Quantitative Description of Membrane Current and its Application to Conduction and Excitation in Nerve, Journal of Physiology, Vol.117, pp. 500-544, 1952
- [11] Rui Zhou and Diyi Chen, Herbert H. C. Iu, Fractional order 2xn RLC Circuit Network, J. Circuit Syst. and Computer, Vol.24, No.9, 2015
- [12] M E Fouda, A S Elwakil, A G Radwan and BJ Maundy, Fractional-order two port network, Mathematical Problems in Engineering, 2016